Fonctions continues

1 Pratique

Exercice 1

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Donner la formule définissant f^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000671]

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer δ tel que, $(x \neq 1/3 \text{ et } |x| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) + 3| \leqslant \varepsilon$.
Que peut-on en conclure ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000670]

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}\ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000677]

2 Théorie

Exercice 4

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\sup(f,g)$ est continue sur I.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000639]

Exercice 5

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000645]

Exercice 6

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Correction ▼ Vidéo ■ [000642]

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000646]

3 Etude de fonctions

Exercice 8

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}\ ; \quad h(x) = \ln(4x+3)\,.$$

Correction ▼ Vidéo ■ [000686]

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000680]

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe.
Indication : étudier

$$E = \left\{x \in [0,1] \mid \forall t \in [0,x], f(t) > t\right\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000653]

Exercice 11

Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000776]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Distinguer trois intervalles pour la formule définissant f^{-1}.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Le "ε" vous est donné, il ne faut pas y toucher. Par contre c'est à vous de trouver le "δ".

Indication pour l'exercice 3 ▲

Oui pour le deux premières en posant $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, non pour la troisième.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. On pourra utiliser la variante de l'inégalité triangulaire $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$.
2. Utiliser la première question pour montrer que $|f-g|$ est continue.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Ce n'est pas très dur mais il y a quand même quelque chose à démontrer : ce n'est pas parce que $f(x)$ vaut $+1$ ou -1 que la fonction est constante. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Il faut raisonner en deux temps : d'abord écrire la définition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\varepsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A, +\infty]$. Puis travailler sur $[0, A]$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Pour x fixé, étudier la suite $f(\frac{1}{2^n}x)$.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Un *point fixe* est une valeur $c \in [0,1]$ telle que $f(c) = c$. Montrer que $c = \sup E$ est un point fixe. Pour cela montrer que $f(c) \leqslant c$ puis $f(c) \geqslant c$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Le graphe est composé d'une portion de droite au dessus des $x \in]-\infty,1[$; d'une portion de parabole pour les $x \in [1,4]$, d'une portion d'une autre parabole pour les $x \in]4,+\infty$. (Cette dernière branche est bien une parabole, mais elle n'est pas dans le sens "habituel", en effet si $y = 8\sqrt{x}$ alors $y^2 = 64x$ et c'est bien l'équation d'une parabole.)

   On "voit" immédiatemment sur le graphe que la fonction est continue (les portions se recollent !). On "voit" aussi que la fonction est bijective.

2. La fonction est continue sur $]-\infty,1[$, $]1,4[$ et $]4,+\infty[$ car sur chacun des ces intervalles elle y est définie par une fonction continue. Il faut examiner ce qui se passe en $x = 1$ et $x = 4$. Pour $x < 1$, $f(x) = x$, donc la limite à gauche (c'est-à-dire $x \to 1$ avec $x < 1$) est donc $+1$. Pour $x \geqslant 1$, $f(x) = x^2$ donc la limite à droite vaut aussi $+1$. Comme on a $f(1) = +1$ alors les limites à gauche, à droite et la valeur en 1 coïncident donc f est continue en $x = 1$.

   Même travail en $x = 4$. Pour $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$ donc la limite à gauche en $x = 4$ est $+16$. On a aussi $f(4) = +16$. Enfin pour $x > 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$, donc la limite à droite en $x = 4$ est aussi $+16$. Ainsi f est continue en $x = 4$.

   Conclusion : f est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Le graphe devrait vous aider : tout d'abord il vous aide à se convaincre que f est bien bijective et que la formule pour la bijection réciproque dépend d'intervalles. Petit rappel : le graphe de la bijection réciproque f^{-1} s'obtient comme symétrique du graphe de f par rapport à la bissectrice d'équation $(y = x)$ (dans un repère orthonormal).

   Ici on se contente de donner directement la formule de f^{-1}. Pour $x \in]-\infty,1[$, $f(x) = x$. Donc la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in]-\infty,1[$. Pour $x \in [1,4]$, $f(x) = x^2$. L'image de l'intervalle $[1,4]$ est l'intervalle $[1,16]$. Donc pour chaque $y \in [1,16]$, la bijection réciproque est définie par $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Enfin pour $x \in]4,+\infty[$, $f(x) = 8\sqrt{x}$. L'image de l'intervalle $]4,+\infty[$ est donc $]16,+\infty[$ et f^{-1} est définie par $f^{-1}(y) = \frac{1}{64}y^2$ pour chaque $y \in]16,+\infty[$.

   Nous avons définie $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de telle sorte que f^{-1} soit la bijection réciproque de f.

   C'est un bon exercice de montrer que f est bijective sans calculer f^{-1} : vous pouvez par exemple montrer que f est injective et surjective. Un autre argument est d'utiliser un résultat du cours : f est continue, strictement croissante avec une limite $-\infty$ en$-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et on sait même que la bijection réciproque est continue).

Correction de l'exercice 2 ▲

Commençons par la fin, trouver un tel δ montrera que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \varepsilon$$

autrement dit la limite de f en $x_0 = 0$ est -3. Comme $f(0) = -3$ alors cela montre aussi que f est continue en $x_0 = 0$.

On nous donne un $\varepsilon > 0$, à nous de trouver ce fameux δ. Tout d'abord

$$|f(x) + 3| = \left| \frac{2x+3}{3x-1} + 3 \right| = \frac{11|x|}{|3x-1|}.$$

Donc notre condition devient :

$$|f(x) + 3| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11|x|}{|3x-1|} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \varepsilon \frac{|3x-1|}{11}.$$

Comme nous voulons éviter les problèmes en $x = \frac{1}{3}$ pour lequel la fonction f n'est pas définie, nous allons nous placer "loin" de $\frac{1}{3}$. Considérons seulement les $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \frac{1}{6}$. Nous avons :

$$|x| < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{1}{6} < x < +\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} < 3x - 1 < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < |3x - 1|.$$

Et maintenant explicitons δ : prenons $\delta < \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}$. Alors pour $|x| < \delta$ nous avons

$$|x| < \delta = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} < \varepsilon \cdot |3x - 1| \cdot \frac{1}{11}$$

ce qui implique par les équivalences précédentes que $|f(x) + 3| < \varepsilon$.
Il y a juste une petite correction à apporter à notre δ : au cours de nos calculs nous avons supposé que $|x| < \frac{1}{6}$, mais rien ne garantie que $\delta \leqslant \frac{1}{6}$ (car δ dépend de ε qui pourrait bien être très grand, même si habituellement ce sont les ε petits qui nous intéressent). Au final le δ qui convient est donc :

$$\delta = \min(\frac{1}{6}, \frac{\varepsilon}{22}).$$

Remarque finale : bien sûr on savait dès le début que f est continue en $x_0 = 0$. En effet f est le quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas en x_0. Donc nous savons dès le départ qu'un tel δ existe, mais ici nous avons fait plus, nous avons trouvé une formule explicite pour ce δ.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

   $$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$

   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: en effet $g(x) = \frac{k(x) - k(0)}{x - 0}$. Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.

   Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donc $k'(0) = 0$. Bilan : en posant $g(0) = 0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. h est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

   $$h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1 + x - 2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1 + x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

   Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$: $\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leqslant |f(x) - f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2. Si f,g sont continues alors $\alpha f+\beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement on peut conclure :
La fonction $\sup(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ est continue sur I.

Correction de l'exercice 5 ▲

Comme $f(x)^2=1$ alors $f(x)=\pm1$. Attention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1. Supposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x)=+1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y\neq x$ tel que $f(y)=-1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z)=0$, ce qui contredit $f(z)^2=1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. $g(a)=f(\frac{a+b}{2})-f(a)$ et $g(\frac{a+b}{2})=f(b)-f(\frac{a+b}{2})$. Comme $f(a)=f(b)$ alors nous obtenons que $g(a)=-g(\frac{a+b}{2})$. Donc ou bien $g(a)\leqslant0$ et $g(\frac{a+b}{2})\geqslant0$ ou bien $g(a)\geqslant0$ et $g(\frac{a+b}{2})\leqslant0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule en c pour un c entre a et $\frac{a+b}{2}$.
2. Notons t le temps (en heure) et $d(t)$ la distance parcourue (en km) entre les instants 0 et t. Nous supposons que la fonction $t\mapsto d(t)$ est continue. Soit $f(t)=d(t)-4t$. Alors $f(0)=0$ et par hypothèse $f(1)=0$. Appliquons la question précédente avec $a=0$, $b=1$. Il existe $c\in[0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(c)=0$, c'est-à-dire $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$. Donc $d(c+\frac{1}{2})-d(c)=4(c+\frac{1}{2})-4c=2$. Donc entre c et $c+\frac{1}{2}$, (soit 1/2 heure), la personne parcourt exactement 2 km.

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A\in\mathbb{R}\quad x>A\Rightarrow\ell-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant\ell+\varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon=+1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x>A$, $\ell-1\leqslant f(x)\leqslant\ell+1$. Nous venons de montrer que f est bornée “à l'infini”. La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,A]$, donc f est bornée sur cet intervalle: il existe m,M tels que pour tout $x\in[0,A]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. En prenant $M'=\max(M,\ell+1)$, et $m'=\min(m,\ell-1)$ nous avons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $m'\leqslant f(x)\leqslant M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes: regardez $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x\neq\frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2+3x)\times(5-2x)\geqslant0$, soit $x\in[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3},\frac{5}{2}[$.
2. Il faut $x^2-2x-5\geqslant0$, soit $x\in]-\infty,1-\sqrt{6}]\cup[1+\sqrt{6},+\infty[$.
3. Il faut $4x+3>0$ soit $x>-\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4},+\infty[$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Fixons $x\in\mathbb{R}$ et soit $y=x/2$, comme $f(y)=f(2y)$ nous obtenons $f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Puis en prenant $y=\frac{1}{4}x$, nous obtenons $f(\frac{1}{4}x)=f(\frac{1}{2}x)=f(x)$. Par une récurrence facile nous avons

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f(\frac{1}{2^n}x)=f(x).$$

Notons (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}x$ alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par la continuité de f en 0 nous savons alors que: $f(u_n) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$. Mais $f(u_n) = f(\frac{1}{2^n}x) = f(x)$, donc $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$, et donc la limite de cette suite est $f(x)$! Donc $f(x) = f(0)$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Si $f(0) = 0$ et c'est fini, on a trouver le point fixe ! Sinon $f(0)$ n'est pas nul. Donc $f(0) > 0$ et $0 \in E$. Donc E n'est pas vide.

2. Maintenant E est un partie de $[0,1]$ non vide donc $\sup E$ existe et est fini. Notons $c = \sup E \in [0,1]$. Nous allons montrer que c est un point fixe.

3. Nous approchons ici $c = \sup E$ par des éléments de E : Soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to c$ et $x_n \leqslant c$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $c = \sup E$. Comme $x_n \in E$ alors $x_n < f(x_n)$. Et comme f est croissante $f(x_n) \leqslant f(c)$. Donc pour tout n, $x_n < f(c)$; comme $x_n \to c$ alors à la limite nous avons $c \leqslant f(c)$.

4. Si $c = 1$ alors $f(1) = 1$ et nous avons notre point fixe. Sinon, nous utilisons maintenant le fait que les élements supérieurs à $\sup E$ ne sont pas dans E : Soit (t_n) une suite telle que $t_n \to c$, $t_n \geqslant c$ et telle que $f(t_n) \leqslant t_n$. Une telle suite existe car sinon c ne serait pas égal à $\sup E$. Nous avons $f(c) \leqslant f(t_n) \leqslant t_n$ et donc à la limite $f(c) \leqslant c$.

   Nous concluons donc que $c \leqslant f(c) \leqslant c$, donc $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 11 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln x} = e^{x \ln y} \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0, 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1, e[$ et une dans $]e, +\infty[$.
Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y = 1$, $y = 2$ et $y \geqslant 3$. Si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x = 1$. Si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.
Si $y \geqslant 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e, +\infty[$ qui est $x = y$, et une solution x dans l'intervalle $]1, e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1, e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.
Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.
